



TITLE:

気泡の非線形振動による圧力波の放射(流体の非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

白崎, 実; 井上, 良紀

CITATION:

白崎, 実 ...[et al]. 気泡の非線形振動による圧力波の放射(流体の非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1995, 908: 72-82

ISSUE DATE:

1995-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59501>

RIGHT:

気泡の非線形振動による圧力波の放射

北大 工 白崎 実 (Minoru Shirazaki)

北大 工 井上良紀 (Yoshinori Inoue)

1. はじめに

液体中に気泡が存在しているとき、まわりの液体の圧力が変化すると気泡は運動(振動)を開始する。液体中の単一気泡の問題を初めて解析的にとり扱ったのは Rayleigh¹ である。Rayleigh は、無限に広がる非粘性非圧縮性の静止液体中に突然一個の球形の真空部分が生じたとき、それは極めて短時間のうちに周囲の液体で埋められることによって崩壊して、このときに液体中に高い圧力を発生することを示した。また、空洞が等温変化をする気体で満たされている場合の気泡半径 $R^*(t^*)$ の振動方程式も求めた。その後の気泡力学の研究は、この Rayleigh の理論に、種々の実在効果すなわち、液体の粘性²、圧縮性³ や液体-気体界面で働く表面張力⁴、蒸発・凝縮の熱的な非平衡過程の影響など⁵を考慮するという形で発展してきた。これらの研究ではさまざまな実在効果を取り入れた気泡振動を支配するモデル方程式が導出されていて、気泡の非線形振動に対する影響が調べられている。しかし、気泡の非線形振動によって液体中に放射される波に主眼をおいた詳細な研究は比較的少なく、液体中を伝播する波に関しては、まだ明らかにされていないことが多い。

本研究では、単一球形気泡を含む液体がある瞬間に一様に加圧されるという基本的な問題について考える。このとき、気泡の非線形振動によって液体中に放射される圧力波に着目する。この圧力波が十分に強ければ、液体中を伝播するとともに蓄積する非線形効果によって徐々にその波形を歪ませ、やがて遠方場で衝撃波を形成する。衝撃波形成距離は Benjamin⁶ によって初めて見積られたが、その際に表面張力および粘性の効果は考慮されていない。そこで、初期に与える加圧比の大きさ、液体の粘性、および気体-液体界面に働く表面張力の効果が、衝撃波の形成距離へどのような影響を与えるかを特異摂動法を用いて調べる。

また、液体の圧縮性、粘性および表面張力の効果を考えない場合には、気泡の収縮過程で液体中に誘起される圧力場の時間発展は、圧力の最大値が液体中のどの位置に存在するかによって3つの段階から構成されることが理論的に証明されている。⁷ このことを、液体の圧縮性、粘性および表面張力の効果を考慮した場合について調べ、この場合にも、やはり液体の圧力場の時間発展は3つの段階からなることを示す。

さらに、気泡の振動の初期に液体中に放射される膨張波の伝播についても調べる。これには、流れ場についての基礎方程式系を近似することなしに、差分法 (Osher の差分スキーム) で数値的に解いて解析を行う。

2. 問題の定式化—基礎方程式と境界条件および初期条件

無限に広がる静止液体中に、半径 R_0^* 、内部の圧力が $p_i^*(0)$ である中心を固定された単一球形気泡がはじめに存在するとする。時刻 $t^* = 0$ の瞬間に気泡を含む液体の場全体が一様に p_∞^* ($p_\infty^* > p_i^*(0)$) に加圧されたとする。このとき $t^* \geq 0$ での気泡の非線形振動とそれにより

誘起される液体の流れ場について考える。ただし、気泡は常に球形を保って運動し、流れ場も球対称であるとする。液体の圧縮性、粘性、液体-気体の界面に働く表面張力の効果は考慮するが、気泡面を通しての物質および熱の交換の効果は小さいとして無視する。気泡内気体は凝縮しない理想気体で、気泡内で常に均一であるとし、一様に断熱圧縮あるいは断熱膨張すると仮定し、気泡内部の波は考えない。

このとき液体の流れ場の連続の式と運動方程式は球座標系で、次のように書ける。

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} \rho^* u^*) = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \quad (2.1)$$

ここで、 r^* は気泡の中心からの距離、 t^* は時間、 u^* は流速、 ρ^* は密度、 p^* は圧力を表し、すべて有次元の量である。Navier-Stokes 方程式において、粘性の効果と圧縮性の効果の積の項は小さいとして落とすことで運動方程式は (2.1) 第 2 式となる。その結果、粘性の効果は境界条件にのみに現れることになる。また、液体を水とすると次の状態方程式を用いることができる。

$$p^* = (p_\infty^* + B^*) \left(\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*} \right)^n - B^* \quad (2.2)$$

ここに、 $n = 7.15$ 、 $B^* = 3049.13 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ であり、 ρ_∞^* は、 $p^* = p_\infty^*$ における水の密度である。球対称性より液体の流れ場は渦なしであり、速度ポテンシャル ϕ^* を導入することができ、次式が成り立つ。

$$u^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \quad (2.3)$$

(2.1)-(2.3) より、液体の場の速度ポテンシャルの支配方程式は次のようになる。

$$\Delta^* \phi^* - \frac{1}{c_\infty^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^{*2}} = \frac{1}{c_\infty^{*2}} \left[\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} \right) + (n-1) \left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right) \right\} \Delta^* \phi^* \right] \quad (2.4)$$

ここで c_∞^* は加圧直後の静止液体中での音速を示し、また $\Delta^* = (2/r^*) \partial / \partial r^* + \partial^2 / \partial r^{*2}$ である。気泡内気体は断熱変化をするので、気泡内圧力 $p_i^*(t^*)$ は、気泡の半径 $R^*(t^*)$ を用いて、

$$p_i^*(t^*) = p_i^*(0) \left(R^*(t^*) / R_0^* \right)^{-3\gamma}, \quad (\gamma: \text{気体の比熱比}) \quad (2.5)$$

と表せる。

気泡面上での運動学的、および力学的な境界条件は、

$$u^* = \dot{R}^* \left(\equiv \frac{dR^*}{dt^*} \right), \quad p^* = p_i^* - \frac{2\sigma}{R^*} - \frac{4\mu}{R^*} \dot{R}^* \quad (r^* = R^* \text{ において}) \quad (2.6)$$

で与えられる。ただし、 σ は表面張力定数、 μ は粘性率であり、“ \cdot ”(ドット)は時間に関する微分を表す。また無限遠では、液体は圧力 p_∞^* で静止一様状態にあるので、そこでの境界条件は、

$$r^* \rightarrow \infty \text{ において} \quad u^* = 0, \quad p^* = p_\infty^* \quad (2.7)$$

となる。一方、初期条件は次のように与えられる。

$$r^* \geq R_0^* \text{ において} \quad u^* = 0, \quad p^* = p_\infty^* \quad (2.8)$$

$$0 \leq r^* < R_0^* \text{ において} \quad p^* = p_i^*(0) \quad (2.9)$$

3. 特異摂動法による解の導出

本研究では、気泡のまわりの空間を次の3つの領域に分割して考える。

- | | |
|-------------------|-------|
| (1) 内部領域 (非圧縮性領域) | } 近傍場 |
| (2) 外部領域 (波動領域) | |
| (3) 遠方場 | |

そして、それぞれの領域で解を求め、各領域の解どうしを接続させる特異摂動法 (接続漸近展開法) を用いて、気泡の非線形振動によって液体中に引き起こされる流れ場の解析を行う。⁸ このためには、波動領域で音響マッハ数が十分に小さいという、いわゆる弱非線形の仮定が必要である。

気泡近傍には液体の圧縮性をほぼ無視できるような非常に薄い領域 (気泡の半径と同程度) があり、これを内部領域 (非圧縮性領域) と呼ぶことにしよう。その外側に、外部領域 (波動領域) と呼ばれる最低次の近似で線形の波動方程式に支配される領域が存在する。この領域では圧縮性の効果はあらわれるが、非線形の効果はほぼ無視できる。外部領域は、気泡から放射される波の波長程度の広がりをもつ。内部領域 (非圧縮性領域) と外部領域 (波動領域) は、あわせて近傍場と呼ばれる。そしてそのさらに外側は遠方場と呼ばれる。そこでは、波が伝播するにつれて、蓄積する弱非線形効果によって波形は徐々に歪みやがて衝撃波が形成されるであろう。⁹

3-A. 内部領域

この領域では、気泡の初期半径程度の空間スケールで現象を見て、次の無次元化を行う。

$$\begin{aligned} r &= r^*/R_0^*, \quad t = t^*/(R_0^*/U), \quad u = u^*/U, \quad \phi = \phi^*/(R_0^*U), \\ R &= R^*/R_0^*, \quad p = p^*/p_\infty^*, \quad p_i = p_i^*/p_\infty^*, \quad \rho = \rho^*/\rho_\infty^* \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、 $U = \sqrt{p_\infty^*/\rho_\infty^*}$ は、Rayleigh の与えた気泡面の平均速度である。無次元化によって、境界条件 (2.6) と初期条件 (2.8), (2.9) は次のように書ける。

$$\text{境界条件:} \quad r = R \text{ において} \quad u = \dot{R}, \quad p = mR^{-3\gamma} - \frac{2T}{R} - \frac{4N}{R}\dot{R} \quad (3.2)$$

$$\text{初期条件:} \quad r \geq 1 \text{ において} \quad u = 0, \quad p = 1 \quad (3.3)$$

$$0 \leq r < 1 \text{ において} \quad p = m \quad (3.4)$$

ここで、無次元パラメータ m, T, N は

$$m \equiv \frac{p_i^*(0)}{p_\infty^*}, \quad T \equiv \frac{\sigma}{p_\infty^* R_0^*}, \quad N \equiv \frac{\mu U}{p_\infty^* R_0^*} \quad (3.5)$$

であって、 m は初期の気泡内圧力と加圧直後の液体の圧力との比、 T は表面張力の大きさ、 N は粘性の効果の大きさを表す。本解析では特に $p_\infty^* = 1013 \times 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ ($= 1$ 気圧)、 $\rho_\infty^* = 0.99832 \text{ g/cm}^3$, $\sigma = 72.47 \text{ dyn/cm}$, $\mu = 0.01 \text{ poise}$ の場合を取り扱う。したがって、

$$N = N(T) = \frac{\mu U}{\sigma} T \cong 0.1390T \quad (3.6)$$

となり、粘性の効果を表すパラメータ N は表面張力の大きさを表すパラメータ T に比例することになる。ここで、

$$\varepsilon \equiv \frac{U}{c_\infty^*} \cong 6.815 \times 10^{-3} \ll 1 \quad (3.7)$$

という小さいパラメータ ε を導入すると, (2.4), (3.1) より, 内部領域で最も支配的な方程式は次の Laplace 方程式になる.

$$\Delta \phi = 0, \quad \left(\Delta \equiv \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \quad (3.8)$$

よく知られているように, 渦なしの非圧縮性流体の運動は Laplace 方程式によって記述される. つまり, 気泡の近傍の内部領域においては, 液体はほぼ非圧縮性流体としてふるまう.

(3.7) で定義した ε を用いて, 速度ポテンシャルを次のように展開する.

$$\phi = \phi_{i(0)} + \varepsilon \phi_{i(1)} + \varepsilon^2 \phi_{i(2)} + \cdots \quad (3.9)$$

これを (3.2) 第 1 式および (3.8) に代入し, 各オーダーごとに ε^1 のオーダーまで解けば,

$$\phi = -\frac{f_0(t)}{r} + \varepsilon f_1(t), \quad f_0(t) = R(t)^2 \dot{R}(t) \quad (3.10)$$

を得る. ここで, $f_1(t)$ は外部領域との接続によって決まる未知関数である.

3-B. 外部領域

この領域では, 空間座標を次のように無次元化しなおす.

$$\tilde{r} = \frac{r^*}{R_0^*/\varepsilon} = \varepsilon r \quad (3.11)$$

これは, およそ気泡から放射される波長程度の空間スケールで現象を見ることを表している. このとき外部領域で最も支配的な方程式は, 次の線形波動方程式になる.

$$\tilde{\Delta} \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \left(\tilde{\Delta} \equiv \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} \right) \quad (3.12)$$

外部領域では, 速度ポテンシャルを次のように展開する.

$$\phi = \varepsilon \Phi_{o(0)} + \varepsilon^2 \Phi_{o(1)} + \varepsilon^3 \Phi_{o(2)} + \cdots \quad (3.13)$$

内部領域と同様に上式を (3.12) に代入し, 放射条件を仮定して ε^1 のオーダーまで解けば,

$$\phi = -\varepsilon \frac{F_0(t - \tilde{r})}{\tilde{r}} \quad (3.14)$$

となる. F_0 の関数形は, 内部領域との接続によって決まる. 内部領域の十分外側 ($r \gg 1$) の解と外部領域の十分内側 ($\tilde{r} \ll 1$) の解は領域の境界で漸近的に接続されなければならないので,

$$F_0(t) = f_0(t), \quad f_1(t) = F_0'(t) \quad (3.15)$$

を得る. したがって, ε^1 のオーダーまでの内部領域の解は,

$$\phi = -\frac{f_0(t)}{r} + \varepsilon f_0'(t), \quad (f_0 = R^2 R') \quad (3.16)$$

となる。ただし“'”(プライム)は引き数に関する微分を表す。また外部領域の解は次のようになる。

$$\phi = -\varepsilon \frac{f_0(t - \tilde{r})}{\tilde{r}} \quad (3.17)$$

3-C. 遠方場

非線形音響学でよく知られているように、球面波に対して遠方場で適用される非線形方程式(単一波の式)は、

$$\frac{\partial W}{\partial z} - W \frac{\partial W}{\partial \psi} = 0 \quad (3.18)$$

$$W \equiv \varepsilon \tilde{r} u, \quad z \equiv \frac{n+1}{2} \ln \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_m}, \quad \psi \equiv t - \tilde{r} \quad (3.19)$$

で与えられる。^{9,10} ここで \tilde{r}_m は、近傍場と接続する位置を表す。ただし、この方程式は散逸性を見捨て導かれたものであるから、高々衝撃波形成点までしか使えないことを注意しておく。(3.18)の厳密解は、

$$W = W(\psi + zW) \quad (3.20)$$

という陰な解の形で表されるが、この解は近傍場の外部領域の最も支配的な解と十分大きな \tilde{r} で接続されることから、結局遠方場の解は次のようになる。

$$u = \varepsilon^2 \frac{f'_0(\hat{\psi})}{\tilde{r}}; \quad \hat{\psi} = t - \eta, \quad \eta = \tilde{r} - \varepsilon^3 \frac{n+1}{2} f'_0(\hat{\psi}) \ln \frac{\tilde{r}}{\varepsilon R} \quad (3.21)$$

ここで、 $\hat{\psi}$ は、第2式と第3式から η を消去して得られた式より、 \tilde{r} と t の関数として定まる。近傍場と接続する位置 \tilde{r}_m は、考えている近似の範囲では決定できないが、Benjamin⁶ の解析の結果を考慮して気泡面上で接続した。

4. 気泡の非線形振動による圧力波

4-A. 気泡の非線形振動の支配方程式

無限遠での境界条件(3.3)を用いると、液体の圧力は、

$$p = 1 - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 \quad (4.1)$$

とかける。(3.16)を(4.1)を代入し、力学的な境界条件(3.2)第2式を用いると、

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 - p_l(t) + 1 - \varepsilon(R^2\ddot{R} + 6R\dot{R}\ddot{R} + 2\dot{R}^3) = 0, \quad p_l(t) = mR^{-3\gamma} - \frac{2T}{R} - \frac{4N}{R}\dot{R} \quad (4.2)$$

を得る。(4.2)は、圧縮性の効果を取り入れた気泡の非線形振動の支配方程式であり、これはすでに多くの研究者によって導出されている。^{3,5} (4.2)の解 $R(t)$ が求まれば、全領域の流れ場を R の関数として表すことができる。(4.2)は非線形常微分方程式であり、一般には解析的にその解を求めることができないので Runge-Kutta 法を用いて数値的に解を求める。

図1に気泡半径 $R(t)$ の時間変化を, 図2に気泡面の収縮過程における気泡面の最大速度の局所マッハ数 M の T 依存性を示す. ここで M は次のように定義される.

$$M \equiv \frac{\dot{R}_{\max}^*}{c^*}, \quad c^* \equiv c_{\infty}^* \left(\frac{\bar{p}^* + B^*}{p_{\infty}^* + B^*} \right)^{\frac{n-1}{2n}} \quad (4.3)$$

(ただし, \dot{R}_{\max}^* は気泡の収縮過程における気泡面の最大速度, c^* , \bar{p}^* は最大速度が実現される時刻における気泡面上での局所音速, 圧力をそれぞれ表し, 全て有次元の量である.) 図2から m が小さくなるほど M は大きくなり, また有限の T で極大値をもつ場合があることがわかる. 気泡面の最大速度は, T の増大とともに大きくなるが, (3.6) の関係から N も T に正比例して大きくなる. 粘性の効果は気泡面の速度が大きいほどよく効き, 運動を緩やかにするために M は有限の T で極大値をもち得る.

4-B. 衝撃波形成距離

3-C. 節の遠方場の解を用いて, 衝撃波形成距離を与える式を導出する. (3.21) 第3式の ε^3 の項は, 非線形効果のために波形が歪んでゆく効果を表している. 気泡から放射された圧力波は伝播するとともに, その波形を歪ませ, 次の条件が満たされる点で, 衝撃波が形成される.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{r}} \right)_t = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_t \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{r}} \right)_t = -\infty \quad (4.4)$$

(3.21), (4.4) より衝撃波形成距離 r_s は,

$$r_s = R(\hat{\psi}_s) \exp \left[\frac{2}{\varepsilon^3 (n+1) f_0''(\hat{\psi}_s)} \right], \quad (f_0'' = R^2 R''' + 6RR'R'' + 2R'^3) \quad (4.5)$$

となる. (4.5) の f_0'' を最初に極大にする位相 $\hat{\psi}_s$ で最小の衝撃波形成距離が与えられる. 図3は, 衝撃波形成距離 r_s の m , T 依存性である. ここで r_s は初期半径 R_0^* で規格化されている. 加圧比 m を小さくすると衝撃波形成距離は小さくなる. また, m を固定して T を大きくしていくと r_s は有限の T で最小値をもつ. これは, 4-A. 節で述べた気泡振動の場合と同様の理由による.

4-C. 圧力場の時間発展の3段階

気泡の収縮過程において液体中に形成される圧力場について考える. 液体を非圧縮性流体であると仮定し, 表面張力の効果を考えないときの圧力場の時間発展は, 圧力の最大値が

- (1) 第1段階: 無限遠にある
- (2) 第2段階: 液体中の有限の位置にある
- (3) 第3段階: 気泡面上にある

という3段階から構成されることが理論的に解析されている.⁷ また, 真空のキャビティが崩壊する場合の圧力場の時間発展では, 第3段階は存在せず, (1), (2) の2段階のみから構成されることが Rayleigh¹ によって示されている.

液体の圧縮性や表面張力などの効果を考慮した気泡の収縮過程の圧力場についても, たとえば藤川・赤松⁵ や, 富田・島¹¹ によって計算されている. しかし, 上記のような圧力場の時間発

展についての議論はなく、むしろ Rayleigh の取り扱った問題のように (1), (2) の 2 段階から構成されることを示す図が描かれている。

ここでは、液体の圧縮性を考慮したときに圧力場の時間発展がどのようなになるかについて 4-A. 節で得られた解を用いて ε^1 までの精度で調べる。(4.1), (3.17) から、圧力は

$$p(r, t) = 1 + \frac{f'_0}{r} - \frac{1}{2} \frac{f_0^2}{r^4} - \varepsilon \frac{f_0 f'_0}{r^3} + O(\varepsilon^2), \quad f_0(\psi) = R^2(\psi) R'(\psi), \quad \psi = t - \varepsilon r \quad (4.6)$$

とかける。ここでは、第 3 段階の存在について調べる。もし第 2 段階までしかないのであれば、気泡面上での圧力勾配は最小半径に至るまで正のままである。第 3 段階では、気泡面上での圧力勾配が負であることが必要である。(4.6) より気泡面上での圧力勾配は、

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=R} = -\ddot{R}(t) + O(\varepsilon^2) \quad (4.7)$$

とかけるので、気泡面の加速度と気泡面上の圧力勾配は逆の符号をもつことがわかる。気泡の運動では、内向きの最大流速を実現する時刻を境にして、 \ddot{R} の符号は、負から正へと変わるから、気泡面上での圧力勾配が正から負へと変わる時刻が必ず存在する。以上のことと、(4.6) を用いた数値解析から、液体の圧縮性および表面張力の効果を考慮した場合についても、確かに圧力の時間発展は 3 段階から構成されることが示される (図 4)。

5. 気泡の非線形振動によって放射される膨張波

気泡の振動開始直後の短い時間に着目した研究はこれまでになく、詳しく調べられていない。そこで、このような時間領域、およびそれに対応する空間領域での現象を調べる。

本章では気泡を含む流れ場の基礎方程式系 (2.1), (2.2) を Osher の差分スキームで直接解いて気泡の振動初期の短い時間の流れ場について調べる。得られた圧力場の解を図 5 に実線で示す。図中には、 $t = 0.002$ から $t = 0.01$ まで 0.002 ごとの圧力分布が示してある。ここで考えているような極めて短い時間では気泡半径はほとんど変化せず初期半径程度のままである。各時刻における波の先端 (wave front) より遠方は加圧後の静止一様状態である。 $t = 0$ の瞬間に場が加圧されることで、気泡面上に圧力の不連続が生じ、それが液体中を伝播する。しかしこの不連続は、そのまま不連続面として伝播していくのではなく、徐々にではあるが“なだらか”になりながら伝播していく。これは、圧力差が伝播速度の差を生じ、圧力の高い部分は低い部分よりも速く伝わるからである。よって、 $t = 0$ の瞬間に不連続であった圧力分布は、時間の経過とともになだらかになりながら伝播していく。この部分は、膨張波であり、気泡の振動の初期のごく短い時間に気泡から膨張波が放射されていることを示している。

これに対して (4.6) を用いて圧力場を求めた結果 (図 5 中の破線) では、不連続がそのまま伝播している。これは (4.6) の精度の範囲では、流れ場は線形の波動方程式に支配されているため、圧力差による伝播速度の差が生じないからである。しかし膨張波を記述していない点を除けば、(4.6) は比較的初期の時刻にはよい近似を与えていることがわかる。このような膨張波の存在は、気泡振動が穏やかな初期の時刻においても流れ場の非線形性が効いていることを主張する。

図 5 の膨張波の付け根の部分をつ結んでできる曲線は、液体を非圧縮性流体としたときの圧力分布とほぼ等しい。非圧縮性流体中の音速は無限大であるから、 $t = 0$ の瞬間にできた圧力

の不連続は、次の瞬間には無限遠まで伝わっていて、無限遠において $p = 1$ となる。このことから、気泡の振動開始直後の、気泡近くの領域では、膨張波の部分を除いては非圧縮性の解に極めて近く、この領域はほぼ非圧縮性の領域であることがわかる。このことは、3. 節で行った、空間を3つの領域に分け、内部領域が最低次の近似で非圧縮性領域であるとした解析が妥当であったことを示している。

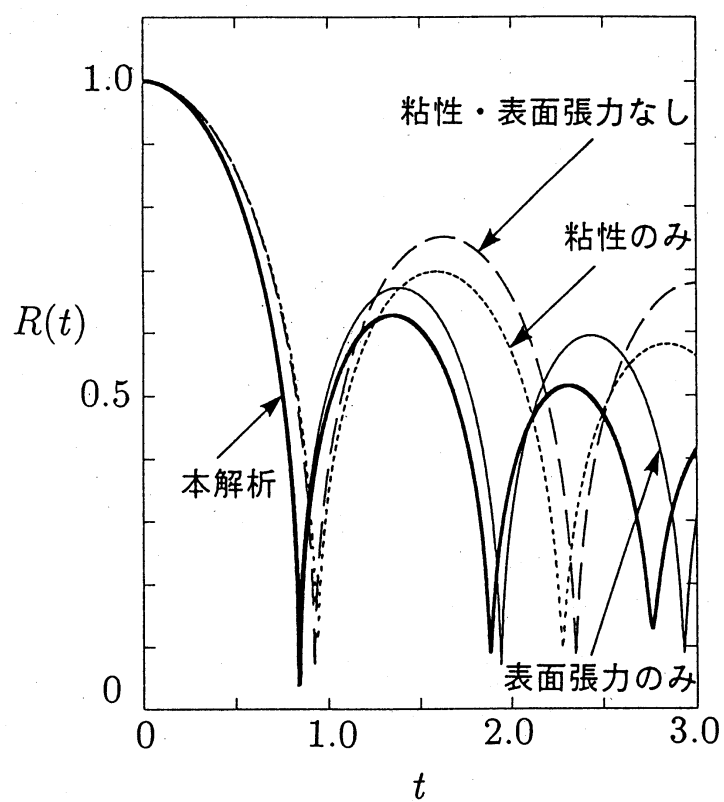
6. おわりに

単一球形気泡を含む液体が $t^* = 0$ に一様かつステップ的に加圧される場合について、気泡の非線形振動と放射される圧力波を解析し、気泡界面に働く表面張力、粘性が及ぼす影響について調べた。

- (1) パラメータ T を大きくしていくと気泡の運動は激しくなるが、ある有限の T をピークに緩やかになっていく。そのため、 T を変化させたときの衝撃波形成距離のグラフは最小値をもつ。これは、表面張力の効果が大きくなると気泡の運動は激しくなる傾向がある一方で、気泡面速度が増すほど粘性の効果がよく効いてくることによるものと考えられる。
- (2) 気泡の収縮過程における圧力場の時間発展は、液体の圧縮性、気泡界面で働く表面張力、粘性の効果を考慮した場合にも、考慮しない場合と同様に3段階に分かれる。
- (3) 基礎方程式系を数値計算で直接解くことによって明らかになったことは、振動の初期時刻 ($t = 0$) に気泡から液体中に膨張波が放射されることである。
- (4) しかし、気泡近傍は膨張波の存在する層を除けば、ほぼ非圧縮性の領域である。これの外側は波動領域であり、その遠方場において衝撃波が形成される。

参考文献

- ¹ Rayleigh, Lord 1917 *Philos. Mag.* **34**, 94–98.
- ² Poritsky, H. 1952 *Proc. 1st U.S. National Congress in Applied Mechanics* (A.S.M.E.), 813–821.
- ³ Keller, J. B. & Kolodner, I. I. 1956 *J. Appl. Phys.* **27**, 1152–1161.
- ⁴ Plesset, M. S. 1949 *J. Appl. Mech.* **16**, 277–282.
- ⁵ Fujikawa, S. & Akamatsu, T. 1980 *J. Fluid Mech.* **97**, 481–512.
- ⁶ Benjamin, T. B. 1958 *Proceedings of the 2nd Symposium on Naval Hydrodynamics*, Washington 207–233.
- ⁷ Inoue, Y. & Kobayashi, T. 1993 *Fluid Dyn. Res.* **11**, 85–97.
- ⁸ Inoue, Y. & Gotoh, Y. 1991 *J. Sound Vib.* **146**, 269–280.
- ⁹ 井上良紀, 木谷 勝 編: 乱れと波の非線形現象 (朝倉書店, 1993)
- ¹⁰ Blackstock, D. T. 1964 *J. Acoust. Soc. Am.*, **36** 217–219.
- ¹¹ Tomita, Y. & Shima, A. 1967 *Bull. JSME* **20**, 1453–1460.



$$m = 0.01$$

$$T = 0.1$$

図 1. 気泡の非線形振動

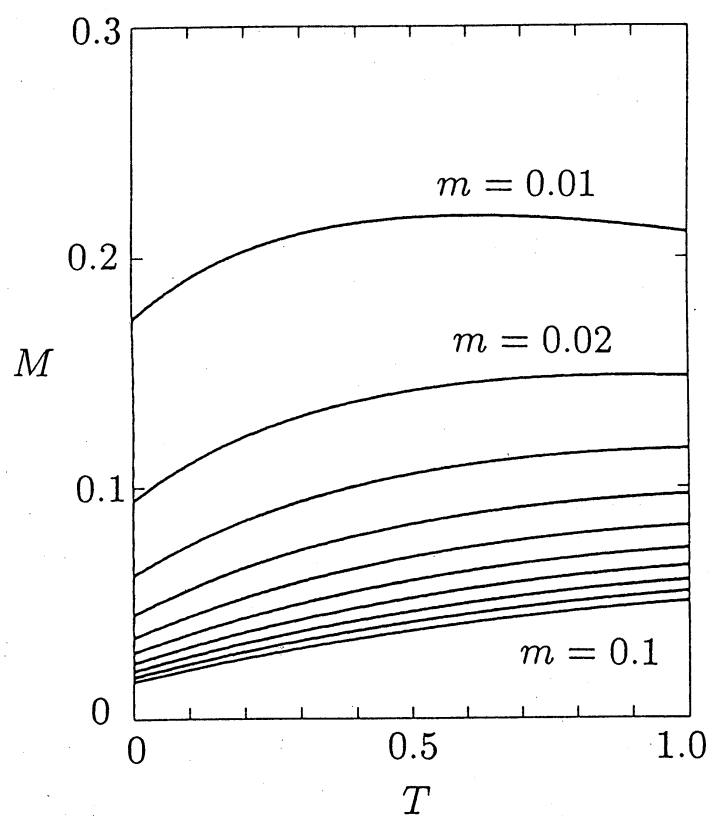


図 2. 気泡面の最大速度の
局所マッハ数
(収縮過程)

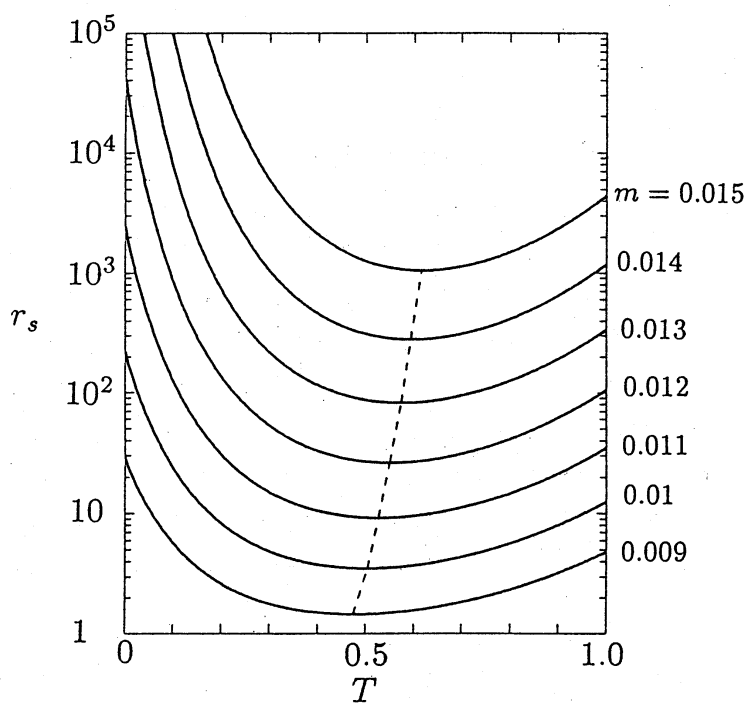


図 3. 衝撃波形成距離

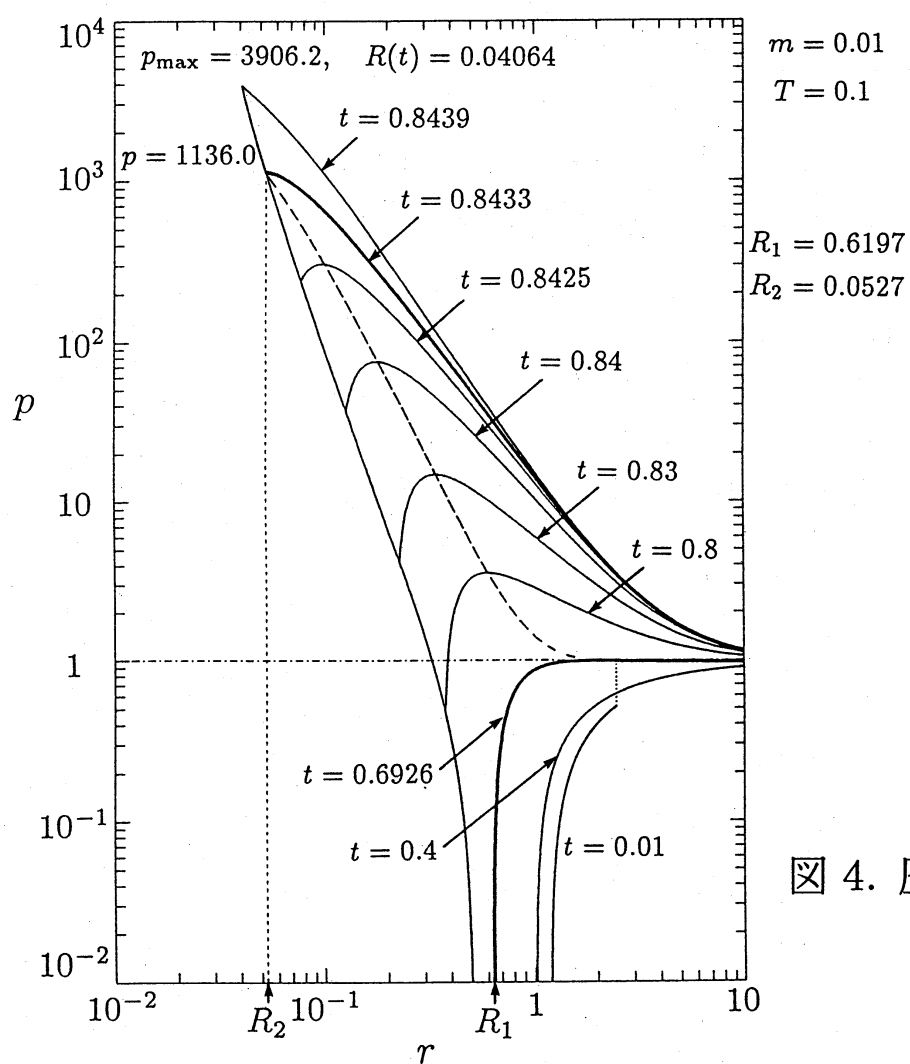


図 4. 圧力場の時間発展
(収縮過程)

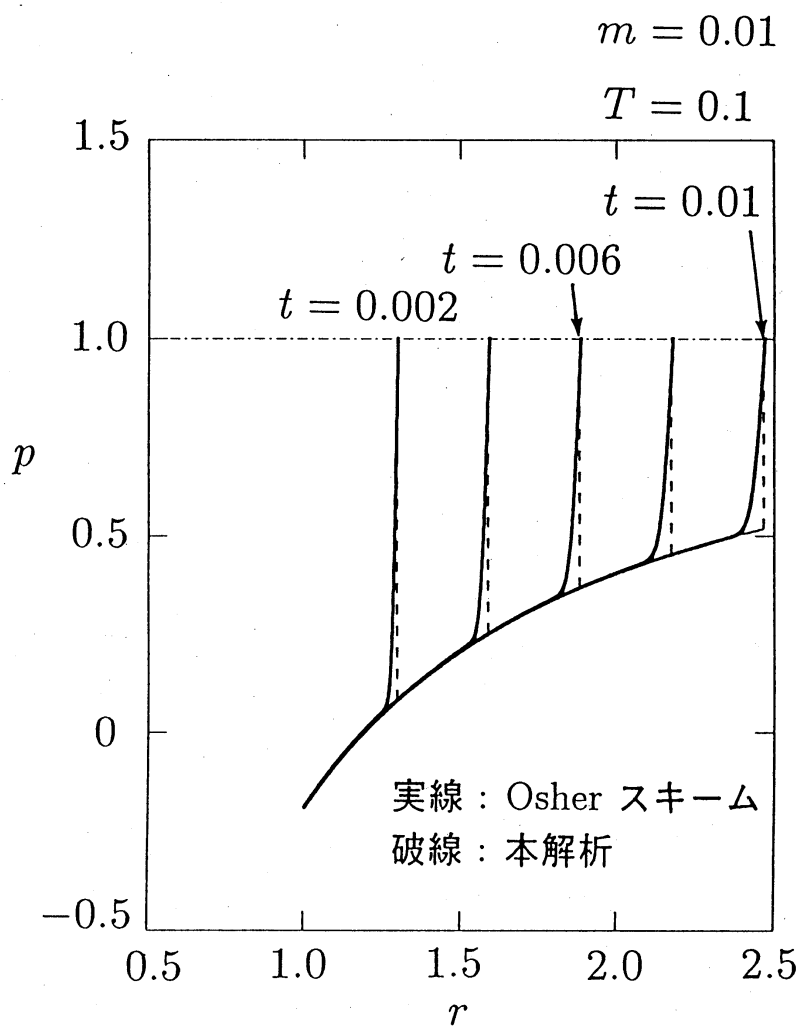


図 5. 圧力場の時間変化